UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Introducción a las matemáticas de Srinivasa Ramanujan

Autor/es

RODOLFO CANAL NEGUERUELA

Director/es

ÓSCAR CIAURRI RAMÍREZ

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2018-19

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Introducción a las matemáticas de Srinivasa Ramanujan

Realizado por:

Rodolfo Canal Negueruela

Tutelado por:

Oscar Ciaurri Ramírez

Logroño, julio de 2019

Introducción a las matemáticas de Srinivasa Ramanujan

Trabajo fin de grado

elaborado por

Rodolfo Canal Negueruela

Resumen

El presente trabajo está enfocado a entender parte de los trabajos del gran matemático indio Srinivasa Ramanujan. Su formación autodidacta y su contacto con G. H. Hardy marcaron su manera de entender y exponer las matemáticas. Sus trabajos son, en ocasiones, ciertamente difíciles de entender para un estudiante de matemáticas actual. Nuestro objetivo es intentar desentrañar y comprender en detalle dos de sus artículos

El trabajo consta de tres capítulos. En el primero se dan unas pinceladas de la vida de Ramanujan y se incluyen algunos de sus logros más representativos. Los otros dos capítulos están dedicados al estudio detallada de dos artículos que publicó Ramanujan. El primero de ellos trata de un método geométrico para aproximar el número irracional π. El segundo se centra en la representación de algunas constantes en forma de series numéricas, entre ellas se encuentra la constante γ de Euler-Mascheroni.

Abstract

This work is focused on understanding a portion of the works of the great indian mathematician Srinivasa Ramanujan. His selfeducation and his contact with G. H. Hardy marked his way of understand and show mathematics. His works often are dificult to complain to a modern mathematics student. Our objetive is try to figure out and understand two of his articles.

This work has three chapters. The first one exposes the live and main representative results of Srinivasa Ramanujan. The two other ones are devoted to the detailed study of two articles that Ramanujan published. The first article is focused on a geometric method to aproximate the irrational number π. The other one contains the representation of some constants by numeric series, such us the Euler-Mascheroni constant γ.

Índice general

Capítulo 1

Srinivasa Ramanujan

1.1. Biografía

Srinivasa Aiyangar Ramanujan fue un matemático indio nacido el 22 de diciembre de 1887 en Erode, una pequeña ciudad situada 400 km al sudeste de Madras, en el sur de la India. Su padre era contable de un comerciante de ropa en Kumbakonam, donde la familia residía desde poco tiempo tiempo después de su nacimiento. Cabe destacar que nació en la época en la que la India era una colonia británica y luchaba por su independencia.

Asistió por primera vez al colegio a la edad de 5 años, y a los 7 fue enviado al instituto de Kumbakonam donde permaneció durante 9 años. Sus habilidades excepcionales comenzaron a destacar antes de los 10 y para los 13 años ya era reconocido como un niño fuera de lo común. Sus biógrafos indios destacan algunos datos curiosos. Por ejemplo, mencionan, que una vez que aprendió trigonometría, redescubrió por su cuenta los teoremas de Euler para el seno y el coseno[1], pero cuando se dió cuenta de que eran resultados ya conocidos se decepcionó.

Hasta los 16 años no tuvo a su alcance ningún libro de matemáticas, entonces obtuvo un libro que cambió su vida: *Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics* de G. S. Carr. Dicho libro despertó al genio. Es un libro de instrucción elemental con más de 6000 teoremas cuyas pruebas no son más que vagas referencias y es en lo que menos hincapié se hace. No hay duda de que lo influenció profundamente y es conocido como el punto de partida a su carrera y su forma de entender las matemáticas, dado que el estilo de escritura del libro está acentuado en el trabajo posterior de Ramanujan.

El libro de Carr tenía secciones de trigonometría, álgebra, cálculo y geometría analítica, pero algunas áreas estaban desarrolladas desproporcionalmente, en particular los aspectos formales del cálculo integral. No hay teoría de funciones y se pone en duda que Ramanujan a lo largo de su vida supiese con precisión lo

[1] En palabras de Hardy *"... by which I understand the relations between the circular and the exponential functions"* [5]

que era una función analítica. Todos estos temas son los que más adelante trata en su obra y marcan sus logros.

Tras superar sus estudios de secundaria en diciembre de 1903, accedió en enero de 1904 al *Goverment College* de Kumbakonam, con una beca de la propia institución. Su excesiva dedicación a las matemáticas y su desidia con el resto de sus actividades formativas, hicieron que no superase los exámenes finales (Fine Arts Examination) que le hubiesen permitido acceder a la Universidad de Madrás. En 1906 realizó un nuevo intento de ingresar en dicha universidad y para ello se matriculó en el *Pachaiyappa Colloge* de Madrás. Sin embargo, a los tres meses cayó enfermo y regresó a Kumbakonam. Preparó los exámenes por libre y superó el de matemáticas pero no los restantes y no pudo acceder a la Universidad de Madrás.

Dede 1904 Ramanujan se interesó en diversas cuestiones matemáticas relacionadas con la seria armónica, la constante de Euler-Mascheroni (de la que llegó a obtener quince decimales exactos) o los números de Bernoulli. Posteriormente centró su actividad matemática en la relación entre integrales y series hipergeométricas[2]. Existe documentación que permite asegurar que hacia 1908 estaba trabajando en fracciones contínuas y series divergentes.

En abril de 1909 cayó enfermo, teniendo que someterse a una operación, que le supuso un largo periodo de recuperación. El 14 de julio de 1909 se caso con Srimathi Janaki, de 10 años, mediante un matrimonio acordado por su madre. A pesar de ello no se instaló con ella hasta que tuvo doce años.

Godfrey Harold Hardy (1887-1947). Matemático británico, uno de los más grandes del siglo *XX*.

Ramanujan continuó desarrollando sus ideas matemáticas, siendo en esta época cuando empieza a publicar algunos problemas y soluciones en el *Journal of the Indian Mathematical Society*. Debe destacarse el hecho de que lo hacía sin ningún estudio universitario. Es precisamente en esa revista, donde en 1911 publica su primer artículo de investigación, centrado en los números de Bernoulli[3].

En marzo de 1912 y gracias a la intermediación de Ramachandra Rao, un recaudador de impuestos del distrito de Madrás y miembro fundador de la Indian Mathematicas Society, Ramanujan comenzó a trabajar en la oficina portuaria de Madrás.

A lo largo de 1912, Ramanujan envió su trabajo a varios matemáticos británicos, en concreto a E. W. Hobson y H. F. Baker, pero ninguno de ellos respondió a sus cartas. En enero de 1913 escribe a G. H. Hardy al Trinity College por primera vez. En esa primera carta incluye una lista de algunos de sus resultados.

Tras estudiarlos, junto con su colaborador J. E. Littlewood, respondió a la carta de Ramanujan, en febrero, con elogiosos comentarios sobre su trabajo pero solicitando demostraciones de sus afirmaciones. Gracias a la invitación de Hardy para coloborar con él, la Universidad de Madrás, financió una estancia de dos años de Ramanujan en el Trinity College.

Ramanujan llegó a Londres en abril de 1917 y se instaló en la casa de E. H. Neville en Cambridge, un colega de Hardy en el Trinity College al que había

[2]Años más tarde descubrió que había estado trabajando sobre funciones elípticas

[3]Some propieties of Bernoulli's numbers, *Journal of the Indian Mathematical Society*, **3** (1911), 219–234.

conocido en la India, hasta que se mudó a su propia habitación en el Trinity college.

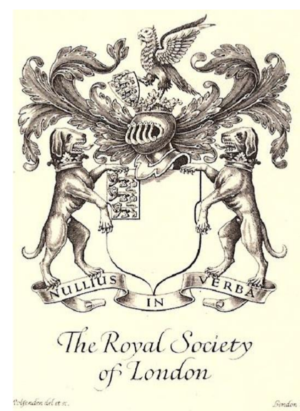
Desde el principio tuvo problemas con su dieta, dado que era vegetariano estricto debido a su religión. El comienzo de la I Guerra Mundial hizo todavia mas difícil para él obtener alimentos y no tardó en caer enfermo.

Desde que comenzaron a trabajar juntos, era tremendamente difícil para Hardy entenderse con él debido a su escasa formación matemática. En ese momento, Hardy solía trabajar con Littlewood, pero este se vió obligado a ir a la guerra, por lo que la colaboración matemática fue únicamente con Hardy, que permaneció en Cambridge durante la guerra. A pesar del bien conocido recio carácter de Hardy, llegaron a ser grandes amigos.

En marzo de 1916 Ramanujna obtuvo su doctorado (conocido entonces como Bachelor Science by Research), del que le habían permitido matricularse en junio de 1914 a pesar de no tener la formación necesaria. Su tesis doctoral se titulo *Highly Composite Numbers* y era un compendio de siete de sus artículos publicados en Inglaterra.

A lo largo de 1917, Ramanujan tuvo problemas con su salud nuevamente. Sin embargo, en 1918, ya repuesto de su enfermedad (tuberculosis), recibió los mayores honores que recibiría en toda su carrera. El 18 de febrero fue elegido miembro de la Cambridge Philisophical Society, tres días más tarde recibió la misma distinción de la Royal Society of London y en octubre obtuvo un puesto de investigador en el Trinity College.

Siguiendo los consejos de sus médicos, Ramanujan abandonó Inglaterra en febrero de 1919 para volver a la India, cuyo clima era más apropiado para la recuperación de la tuberculosis. Sin embargo, su salud se debilitó progresivamente y, pese a los tratamientos médicos, falleció el 26 de abril de 1920.



Escudo de la **Royal Society of London for Improving Natural Knowledge**

1.1.1. Amistad con Hardy

Como hemos comentado antes, Ramanujan viaja a Inglaterra para colaborar con Hardy. Es en este periodo cuando tuvo su mayor actividad matemática. Para entender esta época de su vida debemos resaltar el hecho de que no poseía ninguna educación universitaria. Toda su vida en Inglaterra la conocemos gracias a las palabras de Hardy. Por lo tanto nos guiamos de sus comentarios para entender su estancia en Inglaterra.

La primera impresión que Hardy tuvo de Ramanujan fue a través de sus cartas desde la India, cuyo contenido está recogido casi en su totalidad en los *Collected Papers* [4]. Estas cartas contienen alrededor de unos 120 teoremas, la mayoría identidades extraidas de sus cuadernos.[4]

En las propias palabras de Hardy encontramos un poco de luz de acerca de la esencia de Ramanujan. En cierta ocasión comenta que si llega a instruirlo desde joven podría haber sido un mejor matemático y haber llegado más lejos en sus investigaciones. Pero por otro lado, sería menos Ramanujan, y más como los

[4]Los cuadernos de Ramanujan, conocidos como *Notebooks*, son famosos dado que en ellos se encuentra casi la totalidad de su trabajo. En ellos realizaba sus investigaciones e incluso hay cierto trabajo en ellos que no fue publicado por él.

matemáticos europeos y probablemente se hubiese perdido más que lo ganado [5].

Hardy, a lo largo de su carrera realiza varias publicaciones en las que destaca los logros de Ramanujan, pero también recalca algunos de sus fallos y la importancia de corregirlos. En este aspecto menciona que intentó instruirle, en particular, en su forma de escritura de las matemáticas y de la importancia de las demostraciones. Pero reconoce que aprendió más el de Ramanujan que al revés. En este sentido Hardy nos deja una bonita frase [5].

> It seemed to be ridiculous to worry him about how he had found this or that theorem, when he was showing me half a dozen new ones almost every day.

En unos pocos años adquirió conocimientos acerca de teoría de funciones y teoría de números. Nunca fue un matemático al uso, pero a pesar de ello sabía cuando había probado un teorema y cuando no.

Como sus matemáticas, mostraba extraños contrastes. Tenía pocas aficiones, podría decirse que no tenía interés alguno en literatura o en arte, pero era capaz de diferenciar la buena literatura de la mala. Por otro lado era un filósofo entusiasta y pacifista radical. Se unió, como el resto de los indios que residían en Inglaterra, a las prácticas religiosas de su linaje, pero su religión era objeto de observación y no de convicciones intelectuales. Para sorpresa de Hardy; "Recuerdo bien como me decía, que todas las religiones le parecían mas o menos lo mismo". En cualquier aspecto de su vida tenía una pasión para lo que era inesperado, extraño y raro [5].

Fue Littlewood quien dijo que para Ramanujan cualquier entero positivo era un amigo. Como dato curioso, mencionaremos una anécdota que resume su pasión por los números. En cierta ocasión Hardy pidió un taxi cuyo número era 1729 y le dijo que dicho número no tenía nada de especial. A lo que Ramanujan respondió que era un número muy especial: *Es el menor número que puede ser expresado como suma de dos cubos de dos maneras diferentes* (véase [2] ó [5])[5]. A dicho número lo llamamos ahora número de Ramanujan. En respuesta, Hardy le espetó si podría decirle lo mismo para potencias cuartas, a lo que tras pensarlo un segundo contestó que no se le ocurría ningún ejemplo sencillo. A ojos de Hardy dicho número debia de ser muy largo[6].

Me gustaría incluir una coincidencia que hubiese gustado a Ramanujan. Usando el número de Ramanujan se puede formar una cuadrado mágico[7] de tamaño 4×4 cuyos elementos son cubos. En efecto, tomando el cuadrado

[5] $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$.

[6] El número más pequeño conocido es un ejemplo descubierto por Euler

$$635318657 = 158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4$$

[7] Un **Cuadrado mágico** se obtiene colocando una serie de numeros naturales en una matriz cuadrada de tal forma que en todas sus filas, todas sus columnas y las diagonales principales sumen el mismo número.

16^3	20^3	18^3	192^3
180^3	81^3	90^3	15^3
108^3	135^3	150^3	9^3
2^3	160^3	144^3	24^3

tenemos que las sumas en vertical, horizontal o en diagonal son números divisibles por 1729.

1.2. Las matemáticas de Srinivasa Ramanujan

La mayor parte del trabajo matemático de Ramanujan está recogido en los *Collected Papers* y en sus cuadernos privados. Los *Collected Papers* es una recopilación del trabajo matemático de Ramanujan publicado a título póstumo por sus colegas matemáticos G. H.Hardy, P. V. Seshu Aiyar y B. M. Wilson. Por otro lado, están los cuadernos de Ramanujan, que es donde registraba su trabajo y contienen resultados que no llegaron a publicarse en vida del autor. Entre ellos se encuentra el famoso *Ramanujan's lost Notebook*.

Portada de la edición India de los Collected Papers of Srinivasa Ramanujan.

El trabajo matemático de Ramanujan en la India comienza muy pronto. Cabe resaltar el hecho de que a lo largo de su vida, debido a su escasa formación, redescubrió varios ya teoremas ya conocidos. Ya desde pequeño daba muestras de su potencial, una muestra de ello es su estudio acerca de los cuadrados mágicos antes de los 17 años. En [1] puede verse el siguiente cuadrado mágico 4×4 construido a partir de dos de 4-tuplas (A, B, C, D) y (P, Q, R, S)

$A+P$	$D+S$	$C+Q$	$B+R$
$C+R$	$B+Q$	$A+S$	$D+P$
$B+S$	$C+P$	$D+R$	$A+Q$
$D+Q$	$A+R$	$B+P$	$C+S$

Como ya hemos mencionado anteriormente, a temprana edad ya había comenzado a trabajar sobre la seria armónica, la constante de Euler-Mascheroni y los números de Bernoulli. Su trabajo sobre los números de Bernoulli apareció recogido en el artículo *Some Propieties of Bernoulli´s Numbers Journal of the Indian Mathematical Society* **3**(1911), 219–234. En ese artículo aparecen, por ejemplo, la equivalencia

$$\frac{B_n}{B_{n-2}} \sim \frac{n(n-1)}{4\pi^2},$$

y otras propiedades más complejas. En torno a los números de Bernoulli tenemos un buen ejemplo de teoremas ya conocidos y que Ramanujan redescubrió. En efecto, se trata del Teorema de Von Staudt, que aparece mencionado en una de sus cartas a Hardy.

Teorema 1 (Teorema de Von Staudt)**.** *Para todo $k \geq 2$ par se tiene*

$$B_k = -\sum_{\substack{p\,primo \\ p-1|k}} \frac{1}{p} + C_k,$$

donde $C_k \in \mathbb{Z}$ *y la suma es sobre todos los* p *tales que* $p-1$ *divide a* k.

Como observa Hardy en [5], su trabajo en teoría de números en su época india no es de gran importancia. Tal vez debido a su falta de conocimiento sobre el tema. En concreto, Hardy comenta sus soluciones a la ecuación de Euler

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3.$$

Ramanujan da las soluciones

$$\begin{aligned} x &= 3a^2 + 5ab - 5b^2 \\ y &= 4a^2 - 4ab + 6b^2 \\ z &= 5a^2 - 5ab - 3b^2, \\ w &= 6a^2 - 4ab + 4b^2; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x &= m^7 - 3m^4(1+p) + m(2+6p+3p^2) \\ y &= 2m^6 - 3m^3(1+2p) + 1 + 3p + 3p^2 \\ z &= m^6 - 1 - 3p - 3p^2 \\ w &= m^7 - 3m^4 p + m(3p^2 - 1); \end{aligned}$$

pero no es capaz de obtener la solución general.

La imagen de la figura 1.1 nos muestra un resumen de 15 fórmulas extraidas de las cartas de Ramanujan a Hardy desde la India, realizado por el propio Hardy. El siguiente fragmento es la primera impresión que tuvo Hardy acerca de las matemáticas del genio indio [5].

> The first question was whether I could recognise anything. I have proved things rather like (7) myself, and seemed vaguely familiar with (8). Actually (8) is classical; it is a formula of Laplace first proved properly by Jacobi; and (9) occurs in a paper published by Rogers in 1907. I thought that, as an expert in define integrals, I could probably prove (5) and (6), and did so, thought with a good deal more trouble than I expected. On the whole the integral formulas seemed the least impressive.
>
> The series formulas (1)-(4) I found much more intriguing, and it soon become obvious that Ramanujan must possess much more general theorems and was keeping a great deal up his sleeve. The second is a formula of Bauer well known in the theory of Legendre series, but the others are much harder than they look. The theorems required in proving them can all be found now in Bailey's Cambridge Tract on the hypergeometric functions.
>
> The formulas (10)-(13) are on a different level and obviously both difficult and deep. An expert in elliptic functions can see at once

(1) $$1-\frac{3!}{(1!2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!4!)^3}x^4-\cdots$$
$$=\left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\cdots\right).$$

(2) $$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3-13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\cdots=\frac{2}{\pi}.$$

(3) $$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1.5}{4.8}\right)^4+25\left(\frac{1.5.9}{4.8.12}\right)^4+\cdots=\frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^2}.$$

(4) $$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^5-13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^5+\cdots=\frac{2}{\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^4}.$$

(5) $$\int_0^\infty \frac{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2}\cdots dx=\tfrac{1}{2}\pi^{1/2}\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+1)\Gamma(b-a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b+\frac{1}{2})\Gamma(b-a+1)}.$$

(6) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\cdots}=\frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\cdots)}.$$

(7) If $\alpha\beta=\pi^2$, then
$$\alpha^{-1/4}\left(1+4\alpha\int_0^\infty\frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right)=\beta^{-1/4}\left(1+4\beta\int_0^\infty\frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right).$$

(8) $$\int_0^a e^{-x^2}dx=\tfrac{1}{2}\pi^{1/2}-\frac{e^{-a^2}}{2a+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{2}{2a+}\;\frac{3}{a+}\;\frac{4}{2a+\cdots}.$$

(9) $$4\int_0^\infty\frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}\,dx=\frac{1}{1+}\;\frac{1^2}{1+}\;\frac{1^2}{1+}\;\frac{2^2}{1+}\;\frac{2^2}{1+}\;\frac{3^2}{1+}\;\frac{3^2}{1+\cdots}.$$

(10) If $$u=\frac{x}{1+}\;\frac{x^5}{1+}\;\frac{x^{10}}{1+}\;\frac{x^{15}}{1+\cdots},\qquad v=\frac{x^{1/5}}{1+}\;\frac{x}{1+}\;\frac{x^2}{1+}\;\frac{x^3}{1+\cdots},$$

then $$v^5=u\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}.$$

(11) $$\frac{1}{1+}\;\frac{e^{-2\pi}}{1+}\;\frac{e^{-4\pi}}{1+\cdots}=\left\{\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}e^{2\pi/5}.$$

(12) $$\frac{1}{1+}\;\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\;\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cdots}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{\left\{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2}-1\right\}}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{2\pi/\sqrt{5}}.$$

(13) If $F(k)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^2+\cdots$ and $F(1-k)=\sqrt{(210)}F(k)$, then
$$k=(\sqrt{2}-1)^4(2-\sqrt{3})^2(\sqrt{7}-\sqrt{6})^4(8-3\sqrt{7})^2(\sqrt{10}-3)^4(4-\sqrt{15})^4(\sqrt{15}-\sqrt{14})^2(6-\sqrt{35})^2.$$

(14) The coefficient of x^n in $(1-2x+2x^4-2x^9+\cdots)^{-1}$ is the integer nearest to
$$\frac{1}{4n}\left(\cosh(\pi\sqrt{n})-\frac{\sinh(\pi\sqrt{n})}{\pi\sqrt{n}}\right).$$

(15) The number of numbers between A and x which are either squares or sums of two squares is
$$K\int_A^x\frac{dt}{\sqrt{(\log t)}}+\theta(x),$$

Figura 1.1

> that (13) is derived somehow from the theory of "complex multiplication", but (10)-(12) defeat me completely; I have never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one could have the imagination to invent them. Finally (you must remember that I knew nothing obout Ramanujan, and had to think of every possibility), the writer must be completely honest, because great mathematicians are commoner than thieves or humbugs of such incredible skill.
>
> The last two formulas stand apart because they are not right and show Ramanujan's limitations, but that does prevent them from being additional evidence of his extraordinary powers. The function in (14) is a genuine approximation to the coefficient, thought not at all so close as Ramanujan imagined, and Ramanujan's false statement was one of the most beautiful he ever made, since it ended by leading us to all our joint work on partitions. Finally (15), thught literally "true", is definitelly misleading (and Ramanujan was under real misapprehension). The integral has no adventage, as an aproximation, over the simpler function
>
> $$\frac{k\,x}{\sqrt{\log x}}$$
>
> found in 1908 by Landau. Ramanujan was decieved by a false analogy with the problem of the distribution of primes.

Uno de los motivos por los que causa admiración hoy en día el trabajo de Ramanujan es por lo bellas y sorprendentes que son algunas de sus fórmulas. Una de las que más llama la atención es la siguiente

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cdots}}} = \left(\sqrt{2+\phi}-\phi\right) e^{\frac{2\pi}{5}}, \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

que es la fórmula (11) de la figura 1.1. Pero si obsevamos su trabajo en fracciones contínuas, encontramos la conocida como *fracción continua de Rogers-Ramanujan*

$$1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{1+\cdots}}} = 1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1},$$

de la cuál la anterior es un caso particular.

Tambien encontramos en su trabajo identidades que involucran a π. Por ejemplo, la identidad

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1103 + 26390k)}{(k!)^4\, 396^{4k}},$$

que, debido a su rápida convergencia, es frecuente utilizarla para calcular decimales de π con la ayuda de ordenadores.

En álgebra, tenemos algunos trabajos muy interesantes. Uno de ellos es conocido hoy en dia como la *Identidad de Dougall-Ramanujan*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (s+2n) \frac{s^{(n)}}{1^{(n)}} \frac{(x+y+z+u+2s+1)^{(n)}}{(x+y+z+u+s)^{(n)}} \prod_{x,y,z,u} \frac{x_{(n)}}{(x+s+1)^n}$$
$$= \frac{s}{\Gamma(s+1)\Gamma(x+y+z+u+s+1)} \prod_{x,y,z,u} \frac{\Gamma(x+s+1)\Gamma(y+z+u+s+1)}{\Gamma(z+u+s+1)},$$

donde

$$a^{(n)} = a(a+1)\cdots(a+n-1),\; a_{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1),$$

y $\Gamma(z)$ es la función Gamma [6].

En análisis, Ramanujan redescubrió un número considerable de identidades. Algunas de ellas son, la ecuación funcional para la zeta de Riemann

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s),$$

o la fórmula de sumación de Poisson[8] que aparece en sus trabajos de la siguiente forma:

$$\alpha^{1/2}\left(\frac{1}{2}\phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi(n\alpha)\right) = \beta^{1/2}\left(\frac{1}{2}\psi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n\beta)\right)$$

donde

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \phi(t)\cos(xt)\, dt$$

y $\alpha\beta = 2\pi$.

En palabras de Hardy, Ramanujan "era capaz de evaluar casi cualquier integral definida", pese a sus limitaciones técnicas. Una de sus herramientas

[8] Actualmente, la fórmula de sumación de Poisson se presenta como la identidad

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n),$$

donde

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x}\, dx$$

es la transformada de Fourier de f.

fundamentales para el cálculo de integrales es el conocido actualmente como *Ramanujan's Master Theorem* [6]: Si una función admite el desarrollo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi(k)}{k!}(-x)^k,$$

entonces

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} f(x)\, dx = \Gamma(s) f(-s), \quad s > 0.$$

La identidad anterior es, de hecho, un tipo de fórmula de interpolación y está íntimamente relacionada con la transformada de Mellin.

Hasta ahora hemos visto bastantes fórmulas y teoremas descubiertos por Ramanujan, pero su trabajo más importante, por el se le reconoce, es el de las particiones. Este trabajo lo llevó a cabo durante su estancia en Inglaterra.

Llamamos partición de un entero n a las posibles formas de descomponerlo como sumas de enteros positivos y lo denotaremos por $p(n)$. Por convenio, $p(0) = 1$ y si $m \in \mathbb{Z}$, con $m < 0$ tomamos $p(m) = 0$. Por ejemplo,

$$p(4) = \#\{4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1\} = 5.$$

Aparentemente parece un problema sencillo determinar $p(n)$ para cualquier entero positivo n, pero puede observarse que en cuanto aumentamos n, $p(n)$ se dispara. Por ejempl,o $p(100) = 190{,}569{,}292$. Es por ello que los matemáticos de la época dedicaron grandes esfuerzos en encontrar una fórmula o expresión asintótica para dicha función.

El primero que trabajó en ello fue Euler, que trató de combinar las propiedades de las potencias para resolver dicho problema. La función generatriz que encontró Euler es

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{nm} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n.$$

En 1915, Ramanujan enunció el siguiente teorema acerca de las propiedades de la función partición.

Teorema 2. *Sea n un número natural. Entonces se tiene que*

$$\begin{aligned} p(5n+4) &\equiv 0\,(\text{mód}\,5), \\ p(7n+5) &\equiv 0\,(\text{mód}\,7), \\ p(11n+6) &\equiv 0\,(\text{mód}\,11). \end{aligned}$$

Además, Ramanujan aseguraba que solo existían esas tres relaciones de ese tipo. En efecto, en el año 2005 se probó el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea n un número natural. Entonces los únicos pares de enteros (ℓ, a) tales que*

$$p(\ell n + a) \equiv 0\,(\text{mód}\,\ell),$$

son $(5,4)$, $(7,5)$ *y* $(11,6)$.

A principios del siglo XX, aún era común era común usar la función generalizada de Euler para calcular el valor de $p(n)$ para valores grandes de n. Sin embargo, en 1918 Hardy y Ramanujan obtuvieron la sorprendente expresión asintótica

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Me gustaría concluir este capítulo con una cita de Hardy [5] acerca de Ramanujan que podría resumir su admiración por él y que describe a la perfección al genio indio:

> I have to form myself, as I have never really formed before, and try to help you to form, some sort of reasoned estimate of the most romantic figure in the recent history of mathematics ...

Capítulo 2

Sobre la cuadratura del círculo

En este capítulo vamos a desarrollar el contenido del artículo *Squaring the circle*, aparecido en la revista *Journal of the Indian Mathematical Society*, **5** (1913), 132. El objetivo de Ramanujan en esta breve nota es dar una construcción geométrica que permita aproximar el área encerrada por una determinada circunferencia por el área de un cierto cuadrado. Es bien conocido que no es posible encontrar una construcción con regla y compás de un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado[1], es por eso que Ramanujan se plantea únicamente una aproximación. Veamos la construcción de dicha aproximación.

Comencemos tomando una circunferencia de centro O y diámetro d. Si PR es un diámetro de la circunferencia considerada, dividimos OR en tres partes iguales y tomamos en dicho diámetro el punto T de tal forma que $|TR| = \frac{1}{6}|PR|$. Definimos Q como la intersección, por encima del diámetro PR, de la perpendicular al diámetro PR a través del punto T, véase la figura 2.1.

Puesto que PQR es un triángulo rectángulo, aplicando el teorema de la altura tendremos que

$$|TQ|^2 = \frac{5}{36}|PR|^2.$$

Tomamos un punto S en la circunferencia dada, por encima del diámetro PR, de tal forma que $|RS| = |TQ|$. Sobre el segmento PS tomamos dos puntos M y N verificando que $|MS| = \frac{1}{2}|PS|$ y $|NS| = \frac{1}{6}|PS|$. Es claro, por construcción, que los segmentos MO, NT y SR son paralelos. Asimismo, consideramos un punto K en la circunferencia, por debajo del diámetro PR, satisfaciendo que $|PK| = |PM| = \frac{1}{2}|PS|$. Por el teorema de Pitágoras

$$|PR|^2 = |SR|^2 + |PS|^2 = \frac{5}{36}|PR|^2 + |PS|^2,$$

[1]Este hecho fue probado por Lindemann en 1882.

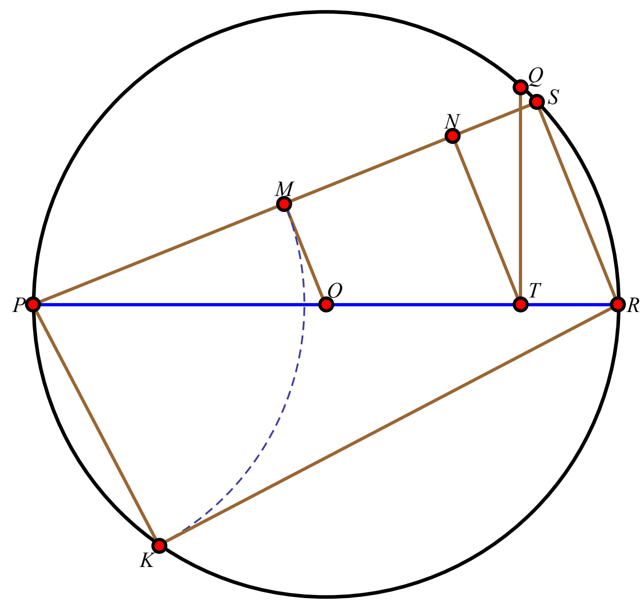


Figura 2.1

luego

$$|PS|^2 = \frac{31}{36}|PR|^2.$$

En la recta perpendicular al diámetro PR, y por debajo de este, tomamos un punto L de tal forma que $|PL| = |MN|$, véase la figura 2.2.

Expresamos ahora $|PK|$ y $|PL|$ en función de $|PR|$. Es claro que

$$4|PK|^2 = |PS|^2 = \frac{31}{36}|PR|^2,$$

y, por tanto, $|PK|^2 = \dfrac{31}{144}|PR|^2$. Igualmente se tiene que

$$9|PL|^2 = |PS|^2 = \frac{31}{36}|PR|^2,$$

y obtenemos la relación $|PL|^2 = \dfrac{31}{324}|PR|^2$. Ahora, como los triángulos PKR y PLR son rectángulos, usando el teorema de Pitágoras, deducimos que

$$|PR|^2 = |RK|^2 + |PK|^2 = |RK|^2 + \frac{31}{144}|PR|^2,$$

y

$$|PR|^2 = |PL|^2 + |RL|^2 = |RL|^2 + \frac{31}{324}|PR|^2,$$

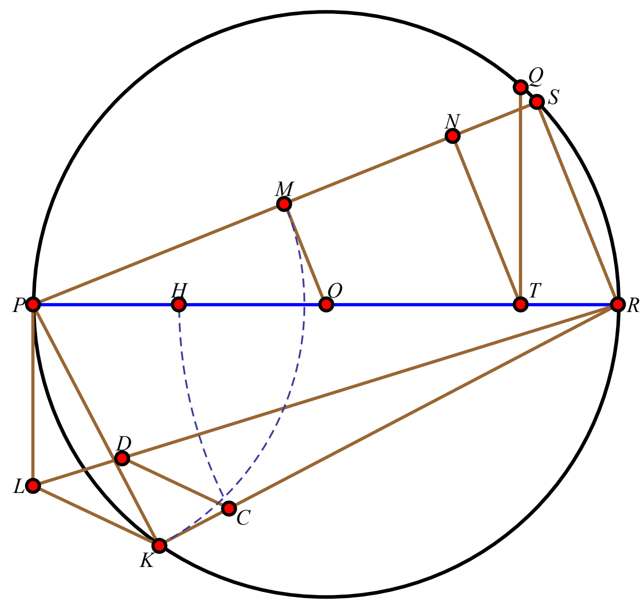


Figura 2.2

lo que implica

$$|RK|^2 = \frac{113}{144}|PR|^2 \qquad y \qquad |RL|^2 = \frac{355}{324}|PR|^2.$$

Denotamos por H el punto medio del segmento PO y tomamos en el segmento RK un punto C verificando que $|CR| = |HR|$. Por último, definimos el punto D como la intersección del segmento RL con la recta paralela a LK pasando por el punto C, véase la figura 2.2.

De este modo, como los segmento DC y LR son paralelos, utilizando el teorema de Tales se se tiene

$$\frac{|RC|}{|RD|} = \frac{|RK|}{|RL|} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{113}{355}}$$

y, como $|RH| = |RC| = \dfrac{3}{4}|PR|$, concluimos que

$$|RD| = \frac{|PR|}{2}\sqrt{\frac{355}{113}}.$$

Como $\frac{355}{113} = 3,14159292$ y $\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$, y puesto que $\dfrac{|PR|}{2}$ es el radio r de la circunferencia inicial, tenemos que

$$|RD|^2 \simeq \pi r^2,$$

es decir, usando el segmento RD es “casi posible” obtener la cuadratura del círculo.

En palabras de Ramanujan [4] “If the area of the circle be 140000 square milles, then RD is greater than the true length by about an inch”.

2.1. Una observación

Si

$$\langle q_0, q_1, q_2, q_3, \dots \rangle = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}}$$

es una fracción continua que converge a un número real ζ, llamaremos convergente $k-\acute{e}simo$ al valor

$$\langle q_0, q_1, q_2, \dots, q_k \rangle = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{q_k}}}}$$

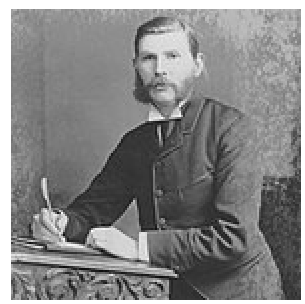
Debemos señalar que $\pi = \langle 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \dots \rangle$ y que en particular la aproximación $\frac{355}{113}$ obtenida geométricamente por Ramanujan se corresponde con el convergente tercero.

Sería interesante obtener un método geométrico que permitiese obtener los sucesivos aproximantes de π. Desafortunadamente, no hemos encontrado referencias sobre este hecho.

Capítulo 3

Una serie para la constante γ de Euler

3.1. Introducción y resultados principales



I. W. Lee Glaisher (1848-1928). Matemático británico, reconocido por su prominente actividad docente en la universidad de Cambridge y por la constante que lleva su nombre

$$A = 1,28242712\ldots$$

El articulo sobre el que vamos a trabajar en este capítulo, al que da título, apareció publicado en *Messenger of Math.*, **46** (1917), 73–80 [7]. *Messenger of Mathematics* era una revista matemática de la que se publicaron 58 volúmenes entre 1871-1929. Los fundadores de dicha revista fueron William Allen Whitworth y Charles Taylor. James Whitbread Lee Glaisher asumió el cargo de editor tras Whitworth. El articulo de Ramanujan sobre el que vamos a trabajar pretende probar un resultado conjeturado por Glaisher en su artículo *Relations connecting quanties of the form* $1^{-n} + 2^{-n} + 3^{-n} + 4^{-n} + \ldots$, en *Messenger of Math.*, **44** (1915), 1–10 [3]. En el artículo de Glasher citado se prueba que

$$\gamma = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k+1}}{(2k+1)(2k+2)}, \tag{3.1}$$

donde S_n es la función Zeta de Riemann evaluada en n, es decir,

$$S_n = \zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n},$$

y γ es la constante de Euler-Mascheroni definida por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right). \tag{3.2}$$

Glaisher en su artículo conjetura la existencia de una expresión más general para la constante γ. En concreto, aventura la existencia de un número racional

λ_r de tal forma que

$$\gamma = \lambda_r - \left(\prod_{i=1}^{r}(r+i)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k+1}}{2k+1}\prod_{j=0}^{r-1}\frac{1}{r+2k+1+j}\right), \tag{3.3}$$

para $r \in \mathbb{N}$. Notar que la identidad (3.1) es el caso particular $r = 1$ de (3.3).

El primer objetivo que se plantea Ramanujan en su trabajo es la prueba del siguiente resultado.

Teorema 4. *Sea $r > 0$, entonces se tiene la siguiente identidad*

$$\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k+1}}{2k+1}\prod_{i=1}^{2k}\frac{r+i}{2r+i} = \int_0^1 \frac{1+x^{2r-1}}{1+x}\,dx. \tag{3.4}$$

Como al tomar r un entero positivo

$$\int_0^1 \frac{1+x^{2r-1}}{1+x}\,dx = \sum_{k=0}^{2r-2}(-1)^k\int_0^1 x^k\,dx = \sum_{k=0}^{2r-2}\frac{(-1)^n}{k+1},$$

la identidad (3.4) se convierte en la fórmula conjeturada por Glaisher con

$$\lambda_r = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2r-1}. \tag{3.5}$$

El Teorema 4 va a ser una consecuencia de un resultado más general.

Teorema 5. *Sean $r, t > 0$, entonces se tiene la siguiente identidad*

$$\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k+1}}{2k+1}\left(\prod_{i=0}^{2k}\frac{r+i}{r+t+i} + \prod_{i=0}^{2k}\frac{t+i}{r+t+i}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{t-1}+x^{r-1}-2x^{r+t-1}}{1-x}\,dx. \tag{3.6}$$

Antes de pasar a la prueba del Teorema 5 veamos que efectivamente implica el Teorema 4.

Demostración del Teorema 4. Tomando $r = t$ en (3.6), tenemos

$$\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k+1}}{2k+1}\prod_{i=1}^{2k}\frac{r+i}{2r+i} = \int_0^1 \frac{x^{r-1}(1-x^r)}{1-x}\,dx.$$

Luego la demostración se concluirá probando la identidad

$$\int_0^1 \frac{x^{r-1}(1-x^r)}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^{2r-1}}{1+x}\,dx. \tag{3.7}$$

Para ello escribimos

$$\int_0^1 \frac{x^{r-1}(1-x^r)}{1-x}\,dx = J_1 + J_2,$$

con

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x^{r-1}-1}{1-x}\,dx \qquad y \qquad J_2 = \int_0^1 \frac{1-x^{2r-1}}{1-x}\,dx.$$

Haciendo en J_1 el cambio de variable $x = t^2$, tenemos

$$\begin{aligned} J_1 = \int_0^1 \frac{2t(t^{2r-2}-1)}{1-t^2}\,dt &= \int_0^1 \frac{1+t^{2r-1}}{1+t}\,dt - \int_0^1 \frac{1-t^{2r-1}}{1-t}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{1+t^{2r-1}}{1+t}\,dt - J_2 \end{aligned}$$

y (3.7) se sigue inmediatamente. □

3.2. Demostración del Teorema 5

La demostración de Teorema 5 será la consecuencia de varios lemas y resultados previos. En primer lugar analizamos la relación entre diversas integrales que contienen a la función $\log\Gamma(x)$ y luego veremos como dichas integrales pueden expresarse en términos de los valores S_n, que recordemos que se corresponden con los valores de la función zeta de Riemann evaluada en los enteros positivos.

Lema 6. *Sean $r, t > 0$, entonces se tienen las siguientes identidades*

$$\begin{aligned} &\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\log\Gamma(1-x)\,dx = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(x)\,dx \\ &\qquad = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(1+x)\,dx - \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log x\,dx. \end{aligned}$$

Demostración. La primera identidad puede establecerse usando el cambio de variable $x = 1-y$. En efecto,

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\log\Gamma(1-x)\,dx = \int_0^1 y^{t-1}(1-y)^{r-1}\log\Gamma(y)\,dy$$

Usando que $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(1+x)\,dx \\ &\qquad = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(x)\,dx - \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log x\,dx, \end{aligned}$$

Lo que prueba la segunda identidad. □

La función Gamma se define mediante la integral impropia

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dx, \qquad x > 0, \tag{3.8}$$

y es bien conocido que puede escribirse como el producto infinito

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{x/n}, \qquad x > 0. \tag{3.9}$$

Este resultado es debido a Weierstrass y, por completitud, al final de este capítulo daremos una prueba de este hecho. Asociada a la función Gamma tenemos la función Beta, definida como la siguiente impropia

$$\beta(u, v) = \int_0^1 x^{u-1} (1-x)^{v-1}\, dx, \qquad u, v > 0.$$

Recordemos que $\beta(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.

Proposición 7. *Sean $r, t > 0$, entonces se tienen las siguientes identidades*

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1} \log \Gamma(1+x)\, dx = -\gamma \beta(t+1, r) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{S_k}{k} \beta(t+k, r), \tag{3.10}$$

y

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1} \log \Gamma(1-x)\, dx = \gamma \beta(r+1, t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_k}{k} \beta(r+k, t). \tag{3.11}$$

Demostración. Comenzaremos probando (3.10). Utilizando (3.9) tenemos que

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{x/n}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{x}{n} < 1$, es clara la identidad

$$\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k n^k}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\log \Gamma(1+x) &= -\gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) \\
&= -\gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k n^k} \right) = -\gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k n^k} \\
&= -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} S_k.
\end{aligned}$$

De este modo

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(1+x)\,dx$$
$$= \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k} S_k\right)dx.$$

Ahora, intercambiando suma e integral, deducimos

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(1+x)\,dx$$
$$= -\gamma\int_0^1 x^{t}(1-x)^{r-1}dx \;+\; \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}S_k\int_0^1 x^{t+k-1}(1-x)^{r-1}dx$$
$$= -\gamma\beta(t+1,r) \;+\; \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{S_k}{k}\beta(t+k,r),$$

lo que demuestra (3.10).

Para (3.11) procedemos del mismo modo. En este caso tenemos el desarrollo

$$\log\Gamma(1-x) = \gamma x + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k}S_k, \tag{3.12}$$

que implica

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\log\Gamma(1-x)\;dx = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\left(\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k}S_k\right)dx,$$
$$= \gamma\beta(r+1,t) + \sum_{k=2}^{\infty}\beta(r+k,t)\frac{S_k}{k},$$

con lo que obtenemos (3.11). □

Veamos ahora una expresión apropiada para nuestros intereses de la integral del Lema 6 que contiene a $\log x$.

Lema 8. *Sean $r,t>0$, entonces se tiene la identidad*

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log x\,dx = -\frac{\Gamma(t)\Gamma(r)}{\Gamma(r+t)}\int_0^1 x^{t-1}\frac{1-x^r}{1-x}\,dx.$$

Demostración. Partiremos de la igualdad

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\,dx = \frac{\Gamma(r)\Gamma(t)}{\Gamma(r+t)}. \tag{3.13}$$

Aplicando el teorema de derivación bajo el signo integral, llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}dx &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(x^{t-1}(1-x)^{r-1}\right)dx\\ &= \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log x\,dx.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{dt}\beta(r,t)=\frac{\Gamma(r)\Gamma(t)}{\Gamma(r+t)}\left(\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}-\frac{\Gamma'(r+t)}{\Gamma(r+t)}\right),$$

de (3.13) deducimos que

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log x\,dx=\frac{\Gamma(r)\Gamma(t)}{\Gamma(r+t)}\left(\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}-\frac{\Gamma'(r+t)}{\Gamma(r+t)}\right).$$

Veamos que

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}-\frac{\Gamma'(r+t)}{\Gamma(r+t)}=-\int_0^1 x^{t-1}\frac{1-x^r}{1-x}\,dx,$$

y habremos concluido. Para ello usamos la identidad

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-z}}{z}-\frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right)dz,$$

que probaremos en la última sección. A partir de ella obtenemos que

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}-\frac{\Gamma'(r+t)}{\Gamma(r+t)}=\int_0^\infty\frac{e^{-tz}-e^{-(r+t)z}}{1-e^{-z}}\,dz.$$

Ahora con el cambio de variable $e^{-z}=x$, deducimos que

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}-\frac{\Gamma'(r+t)}{\Gamma(r+t)}=-\int_0^1 x^t\frac{1-x^r}{1-x},$$

que es lo que queríamos probar. □

Por último, demostraremos una proposición de la que podremos obtener la demostración del Teorema 5.

Proposición 9. *Sean $r,t>0$, entonces se tiene la identidad*

$$\begin{aligned}\gamma+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{S_k}{k}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{r+i}{r+t+i}\right)-\sum_{k=2}^{\infty}\left((-1)^k\frac{S_k}{k}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{t+i}{r+t+i}\right)\\ =\int_0^1 x^{t-1}\frac{(1-x^r)}{1-x}\,dx. \quad (3.14)\end{aligned}$$

Demostración. Por la Proposición 7, usando la identidad

$$\beta(r+j,t) = \beta(r,t) \prod_{i=0}^{j-1} \frac{r+i}{r+t+i} \tag{3.15}$$

llegamos a

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1} \log\Gamma(1-x)\,dx = \beta(r,t)\left(\frac{\gamma r}{r+t} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r+i}{r+t+i}\right)$$

y

$$\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1} \log\Gamma(1+x)\,dx = \beta(r,t)\left(\frac{-\gamma t}{r+t} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{t+i}{r+t+i}\right).$$

Restando las expresiones anteriores y utilizando los Lemas 6 y 8 deducimos que

$$\begin{aligned}\beta(r,t)&\left(\gamma + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r+i}{r+t+i} - \frac{-\gamma r}{r+t} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r+i}{r+t+i}\right) \\ &= -\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1} \log x\,dx = \beta(r,t) \int_0^1 x^{t-1} \frac{1-x^r}{1-x}\,dx,\end{aligned}$$

lo que implica el resultado a probar. □

Demostración del Teorema 5. Para la demostración de (3.6), comenzamos intercambiando r y t en la identidad (3.14) de la Proposición 9 para obtener

$$\gamma + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{t+i}{r+t+i} - \frac{(-1)^k S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r+i}{r+t+i}\right) = \int_0^1 x^{r-1} \frac{1-x^t}{1-x}\,dx. \tag{3.16}$$

Ahora sumando la expresión anterior y (3.14) se tiene que

$$\begin{aligned}2\gamma &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{t+i}{r+t+i} - \frac{(-1)^k S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{t+i}{r+t+i}\right) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r+i}{r+t+i} - \frac{(-1)^k S_k}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r+i}{r+t+i}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{x^{r-1} + x^{t-1} - 2x^{t+r-1}}{1-x}\,dx\end{aligned}$$

lo que inmediatamente implica (3.6) □

3.2.1. Otras identidades y comentarios

Usando (3.14) y (3.16) y restando, en lugar de sumando, Ramanujan deduce la formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{2k} \left(\prod_{i=0}^{2k-1} \frac{r+i}{r+t+i} - \prod_{i=0}^{2k-1} \frac{t+i}{r+t+i} \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{t-1} - x^{r-1}}{1-x} dx. \tag{3.17}$$

Además, observa que si r y t son enteros positivos las integrales que aparecen en el Teorema 5 y en (3.17) son números racionales. En efecto, en ese caso

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{r-1} + x^{t-1} - 2x^{r+t-1}}{1-x}\, dx &= \int_0^1 x^{r-1} \frac{1-x^t}{1-x}\, dx + \int_0^1 x^{t-1} \frac{1-x^r}{1-x}\, dx \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \int_0^1 x^{k+r-1}\, dx + \sum_{k=0}^{r-1} \int_0^1 x^{k+r-1}\, dx \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \frac{1}{k+r} + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{t+k} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{t-1} - x^{r-1}}{1-x} dx &= \int_0^1 \frac{1-x^{r-1}}{1-x} dx - \int_0^1 \frac{1-x^{t-1}}{1-x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{r-2} \int_0^1 x^k - \sum_{k=0}^{t-2} \int_0^1 x^k \\ &= \sum_{k=0}^{r-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{t-2} \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Finalmente analiza el comportamiento cuando $t \to r$, de la identidad (3.17).

Teorema 10. *Sea $r > 0$, entonces se tiene la identidad*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{2k} \prod_{i=1}^{2k-1} \frac{r+i}{2r+i} \sum_{h=0}^{2k-1} \frac{1}{r+h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+k)^2}.$$

Demostración. Dividimos por $r-t$ la identidad (3.17) y tomamos límites a ambos lados. Para el lado izquierdo, como por la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{t \to r} \frac{1}{r-t} \left(\prod_{i=0}^{2k-1} (r+i) - \prod_{i=0}^{2k-1} (t+i) \right) &= \sum_{h=0}^{2k-1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^{2k-1} (r+i) \\ &= \prod_{i=0}^{2k-1} (r+i) \sum_{h=0}^{2k-1} \frac{1}{r+h}, \end{aligned}$$

se verifica que

$$\lim_{t\to r}\frac{1}{r-t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k}}{2k}\left(\prod_{i=0}^{2k-1}\frac{r+i}{r+t+i}-\prod_{i=0}^{2k-1}\frac{t+i}{r+t+i}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k}}{2k}\prod_{i=1}^{2k-1}\frac{r+i}{2r+i}\sum_{h=0}^{2k-1}\frac{1}{r+h},$$

y para el lado derecho, usando nuevamente la regla de L'Hôpital, deducimos que

$$\lim_{t\to r}\frac{1}{r-t}\int_0^1\frac{x^{t-1}-x^{r-1}}{1-x}\,dx=-\int_0^1\frac{x^{r-1}\log x}{1-x}\,dx=-\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^{k+r-1}\log x\,dx$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}te^{-(k+r)t}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(r+k)^2},$$

con lo que concluimos la demostración.

□

Tomando $r=1$ en el teorema anterior, usando la identidad $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ y la notación $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, se deduce la identidad

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k}H_{2k}}{(2k)(2k+1)}.$$

3.3. Una serie para la constante $\log(\pi/2)$

En la segunda parte del artículo sobre el que estamos trabajando, Ramanujan explota las técnicas que ha empleado en la primera parte para obtener una serie que representa a $\log(\pi/2)$. En concreto prueba que para $r\in\mathbb{N}$

$$\log\frac{\pi}{2}=\lambda_r-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S'_{2k}}{2k}\prod_{i=1}^{2k-1}\frac{r+i}{2r+i}\tag{3.18}$$

donde λ_r es el valor racional dado en (3.5) y

$$S'_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^k},\qquad k\geq 1.$$

En este caso se deduce la igualdad (3.18) usando el siguiente resultado

Teorema 11. *Sea $r>0$, entonces se tiene la identidad*

$$\log\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S'_{2k}}{2k}\prod_{i=1}^{2k-1}\frac{r+i}{2k+i}=\int_0^1\frac{1+x^{2r-1}}{1+x}\,dx.$$

Antes de continuar, veamos un caso particular. Tomando $r = 1$ en el teorema anterior, se tiene

$$1 = \log\frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S'_{2k}}{n(n+1)}.$$

La identidad (3.18) se deduce del Teorema 11, del mismo modo que (3.3) se obtuvo del Teorema 4. Como en el caso del Teorema 4, el Teorema 11 es consecuencia de un resultado más general para dos valores positivos r y t.

Teorema 12. *Sean $r, t > 0$, entonces se tiene la identidad*

$$\log\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S'_{2k}}{2k}\left(\prod_{i=0}^{2k-1}\frac{r+i}{r+t+i} + \prod_{i=0}^{2k-1}\frac{t+i}{r+t+i}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{t-1}+x^{r-1}-2x^{r+t-1}}{1-x}\,dx. \tag{3.19}$$

El Teorema 11 se sigue del Teorema 12 tomando $r = t$ y aplicando la identidad (3.7). Como en la sección anterior la prueba del Teorema 12 está basada en varios resultados previos.

En primer lugar veamos un sencillo lema que nos permite relacionar las constantes S_k y S'_k.

Lema 13. *Si $k \geq 2$, $S'_k = (1-2^{1-k})S_k$ y $S'_1 = \log 2$.*

Demostración. El valor de S'_1 se obtiene inmediatamente del desarrollo

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, \qquad x \in (-1,1].$$

En el caso $k \geq 2$ se tiene

$$S'_k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^k} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^k} = (1-2^{1-k})S_k. \quad \square$$

La pieza fundamental para la prueba del Teorema 12 es la siguiente proposición.

Proposición 14. *Sean $r, t > 0$, entonces se tiene la identidad*

$$\log\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S'_k}{k}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{r+i}{r+t+i} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{S'_k}{k}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{t+i}{r+t+i} = \int_0^1 x^{t-1}\frac{1-x^r}{1-x}\,dx. \tag{3.20}$$

Demostración. Para simplificar la demostración tomamos las funciones

$$f_-(x) = \log\Gamma(1-x) - 2\log\Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right) + S_1' x$$

y

$$f_+(x) = \log\Gamma(1+x) - 2\log\Gamma\left(1 + \frac{x}{2}\right) - S_1' x.$$

Usando la identidad (3.12) tenemos

$$\begin{aligned} f_-(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k} S_k - 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k} S_k + S_1' x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} S_k', \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado el lema anterior. De manera análoga deducimos que

$$f_+(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} S_k'.$$

Considerando ahora la suma de integrales

$$I = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1} f_-(x)\,dx + \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1} f_+(x)\,dx,$$

y teniendo en cuenta los desarrollos para las funciones $f_-(x)$ y $f_+(x)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} S_k'\,dx + \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} S_k'\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1} \frac{x^k}{k} S_k'\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1} \frac{(-1)^k x^k}{k} S_k'\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^{k+r-1}(1-x)^{t-1} \frac{S_k'}{k}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^{k+t-1}(1-x)^{r-1} \frac{(-1)^k S_k'}{k}\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k'}{k} \beta(r+k,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k'}{k} \beta(t+k,r) \\ &= \beta(r,t)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k'}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r+i}{r+t+i} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k'}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{t+i}{t+r+i} \right). \end{aligned}$$

Procedamos ahora a transformar las integrales en I. Resulta sencillo comprobar que

$$
\begin{aligned}
I = &\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\log\Gamma(1-x)\,dx + \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(1+x)\,dx \\
&- 2\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\log\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)dx \\
&- 2\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)dx \\
&+ \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}xS_1'\,dx \;-\; \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}xS_1'\,dx.
\end{aligned}
$$

Denotaremos

$$J_1 = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\log\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\,dx$$

y

$$J_2 = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\,dx.$$

Así, usando el cambio de variable $x = 1-w$, es claro que

$$J_1 = \int_0^1 (1-w)^{r-1}w^{t-1}\log\Gamma\left(\frac{1+w}{2}\right)\,dw,$$

y, por tanto,

$$J_1 + J_2 = \int_0^1 (1-x)^{r-1}x^{t-1}\log\left(\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)\,dx.$$

Ahora, aplicando la fórmula de duplicación para la función Gamma

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z),$$

llegamos a que

$$
\begin{aligned}
J_1 + J_2 &= \int_0^1 (1-x)^{r-1}x^{t-1}\log(2^{-x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(x+1))\,dx \\
&= \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(x+1)\,dx \;+\; \beta(t,r)\log\sqrt{\pi} \;-\; \beta(t+1,r)\log 2.
\end{aligned}
$$

De lo anterior, teniendo en cuenta que, $S_1' = \log 2$, deducimos que

$$
\begin{aligned}
I = &\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\log\Gamma(1-x)\,dx \;+\; \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(1+x)\,dx \\
&- 2(J_1+J_2) + (\beta(r+1,t) \;-\; \beta(t+1,r))\log 2 \\
= &\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\log\Gamma(1-x)\,dx - \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log\Gamma(1+x)\,dx \\
&- 2\beta(r,t)\log\sqrt{\pi} \;+\; \beta(r,t)\log 2,
\end{aligned}
$$

y, aplicando los Lemas 6 y 8, llegamos a que

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\log x\,dx - \beta(r,t)\log\frac{\pi}{2} \\ &= \beta(r,t)\left(\int_0^1 x^{t-1}\frac{1-x^r}{1-x}\,dx - \log\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Ya estamos en condiciones de dar la prueba de la identidad (3.19).

Demostración del Teorema 12. Intercambiando los valores de r y t en (3.20) tenemos que

$$\log\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S'_k}{k}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{t+i}{r+t+i} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{S'_k}{k}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{t+i}{r+t+i} = \int_0^1 x^{r-1}\frac{1-x^t}{1-x}\,dx. \tag{3.21}$$

Ahora sumando esta expresión y (3.20) es claro que

$$\begin{aligned} 2\log\frac{\pi}{2} &+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S'_k}{k}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{r+i}{r+t+i} - (-1)^k\frac{r+i}{r+t+i}\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S'_k}{k}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{r+i}{r+t+i} - (-1)^k\frac{t+i}{r+t+i}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{x^{r-1}+x^{t-1}-2x^{r+t-1}}{1-x}\,dx, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

Nota 1. Procediendo como en la demostración anterior pero restando (3.20) y (3.21), en lugar de sumando, deducimos la identidad

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S'_{2k+1}}{2k+1}\left(\prod_{i=0}^{2k}\frac{r+i}{r+t+i} - \prod_{i=0}^{2k}\frac{t+i}{r+t+i}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^{t-1}-x^{r-1}}{1-x}\,dx$$

y, con un argumento de límite como el usado en la prueba del Teorema 10, obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S'_{2k+1}}{2k+1}\prod_{i=0}^{2k}\frac{r+i}{2r+i}\sum_{n=0}^{2k}\frac{1}{r+n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(r+n)^2},$$

que, en particular, al tomar $r=1$ da lugar a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S'_{2k+1}H_{2k+1}}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{\pi^2}{12},$$

donde H_n son los números armónicos.

3.4. Series numéricas que involucran la función zeta de Hurwitz

La función zeta de Hurwitz está dada por

$$\zeta(s,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^s},\qquad \mathrm{Re}(s)>1 \text{ y } \mathrm{Re}(x)>0.$$

Si definimos la función Polygamma como

$$\Psi^{(m)}(x)=\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\log\Gamma(x),\quad m\in\mathbb{N},\, m>0,$$

es conocido que

$$\Psi^{(m)}(x)=(-1)^{m+1}m!\zeta(m+1,x).$$

Luego $\zeta(s,x)$ es una extensión natural de la función $\log\Gamma(x)$. Es por esto que parece lógico que Ramanujan dedique la última parte de su trabajo a obtener resultados en los que la función de Hurwitz juega un rol similar al desarrollado por la función $\log\Gamma(x)$ en la primera parte del trabajo. En primer lugar Ramanujan establece las identidades que aparecen en el siguiente resultado.

Teorema 15. *Sean $r,s>0$, con $r>s$, entonces se tienen las siguientes identidades*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(s+2n-1)}{(2n-1)!}\prod_{k=0}^{2n-2}\frac{(r+k)(s+k)}{2r+k}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2r)\Gamma(r-s)}{\Gamma(r)\Gamma(2r-s)} \tag{3.22}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(s+2n)}{(2n)!}\left(\prod_{k=0}^{2n-1}\frac{(r+k)(s+k)}{2r+k}\right)\left(\sum_{i=0}^{2n-1}\frac{1}{r+i}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2r)\Gamma(r-s)}{\Gamma(r)\Gamma(2r-s)}\int_0^1 x^{r-s-1}\frac{1-x^s}{1-x}\,dx. \tag{3.23}$$

Antes de continuar, dado que la motivación de Ramanujan en este artículo es calcular series para algunas constantes, realizaremos lo propio con las identidades de Teorema 15. Por ejemplo, usando (3.22) con $s=1$ y la identidad $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, llegamos a

$$\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{(2n-1)!}\prod_{k=0}^{2n-2}\frac{(r+k)(k+1)}{2r+k}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2r)\Gamma(r-1)}{\Gamma(r)\Gamma(2r-1)},$$

válida para cada $r>1$. Del mismo, tomando $s=1$ en (3.23) aparece una interesante representación para $\zeta(3)$, la constante de Apery.

Como en las secciones anteriores, el Teorema 15 es consecuencia de un resultado más general.

Teorema 16. *Sean $r, t, s > 0$, con r, $t > s$, entonces se tienen las siguientes identidades*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(s+2n-2)}{(2n-1)!} \left(\prod_{i=0}^{2n-1} \frac{(s+i)(r+i)}{r+t+i} + \prod_{i=0}^{2n-2} \frac{(s+i)(t+i)}{r+t+i} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(r+t)}{\Gamma(r-s+t)} \left(\frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t)} + \frac{\Gamma(r-s)}{\Gamma(r)} \right) \quad (3.24)$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(s+2n)}{(2n)!} \left(\prod_{i=0}^{2n-1} \frac{(s+i)(r+k)}{r+t+k} - \prod_{i=0}^{2n-1} \frac{(s+i)(t+k)}{r+t+k} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(r+t)}{\Gamma(r-s+t)} \left(\frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t)} - \frac{\Gamma(r-s)}{\Gamma(r)} \right) \quad (3.25)$$

Veamos que, efectivamente, el Teorema 16 implica el Teorema 15.

Demostración del Teorema 16. La identidad (3.22) se obtiene de (3.24) tomando $t = r$. Para probar la identidad (3.23) dividimos ambos lados de (3.25) por $r - t$, tomamos límites cuando $t \to r$ y aplicamos la regla de L'Hôpital como ya hemos hecho anteriormente. □

Como en las secciones anteriores, antes de realizar la demostración del Teorema 16 probaremos algunos lemas y proposiciones previos.

Lema 17. *Sean $r, t > 0$, entonces se tienen la siguientes identidades*

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\zeta(s, 1-x)\, dx = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\zeta(s,x)\, dx$$
$$= \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\zeta(s, 1+x)\, dx \,+ \int_0^1 x^{t-s-1}(1-x)^{r-1}\, dx.$$

Demostración. Haciendo el cambio de variable $x = 1 - y$, tenemos que

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\zeta(s, 1-x)\, dx = \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{t-1}\zeta(s, y)\, dy,$$

lo que prueba la primera identidad. Ahora, usando la definición de $\zeta(s, x)$ deducimos inmediatamente que

$$\zeta(s, x) = \frac{1}{x^s} + \zeta(s, x+1)$$

y la segunda identidad se sigue de manera obvia. □

El siguiente lema contiene representaciones integrales para las funciones zeta de Hurwitz y zeta de Riemann.

Lema 18. *Sea $\zeta(s,x)$ la función zeta de Hurwitz y $\zeta(s)$ la función zeta de Riemann, entonces se tienen las siguientes representaciones integrales*

$$\zeta(s,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^{xt}(1-e^{-t})}\, dt, \qquad \mathrm{Re}(x) > 0, \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{3.26}$$

y

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1},\, dt \qquad \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{3.27}$$

Demostración. Comenzamos demostrando (3.26). Utilizamos el desarrollo en serie $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, tomando $x = e^{-t}$ (notar que $e^{-t} < 1$ si $t \in (0, +\infty)$) y tenemos

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-xt}}{1-e^{-t}}\, dt = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(x+k)t} t^{s-1}\, dt.$$

Ahora intercambiamos suma e integral, lo que es posible por ser una serie de términos positivos, y llegamos a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^{xt}(1-e^{-t})}\, dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-(x+k)t} t^{s-1}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty \left(\frac{w}{x+k}\right)^{s-1} e^{-w} \frac{dw}{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^s} \int_0^\infty w^{s-1} e^{-w}\, dw = \zeta(s,w)\Gamma(s)
\end{aligned}$$

lo que prueba (3.26).

Para probar (3.27) basta observar que $\zeta(s,1) = \zeta(s)$.

□

Presentemos ahora un lema que presenta el desarrollo en serie potencias de la función zeta de Hurwitz.

Lema 19. *Si $|x| < 1$, entonces se tiene la identidad*

$$\zeta(s, 1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \zeta(n+s) \prod_{i=0}^{n-1} (s+i),$$

donde debemos entender $\prod_{i=0}^{-1}(s+i) = 1$.

Demostración. De (3.26) obtenemos que

$$\zeta(s, 1-x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^{(1-x)t}(1-e^{-t})}\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{xt}}{e^t - 1}\, dt.$$

Usando el desarrollo en serie de potencias de la función e^{xt} y (3.27), deducimos que

$$\begin{aligned}\zeta(s,1-x) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\sum_{n=0}^\infty \frac{(xt)^n}{n!}\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\int_0^\infty \frac{t^{n+s-1}}{e^t-1}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(s)}\zeta(n+s) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\zeta(n+s)\prod_{i=0}^{n-1}(s+i),\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Finalmente, demos una representación en forma de serie para un cociente de funciones Gamma.

Proposición 20. *Sean $r,t,s>0$, con $t>s$, entonces se tiene*

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\zeta(s+n)}{n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(s+i)\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{r+i}{r+t+i} - (-1)^n\prod_{i=0}^{n-1}\frac{t+i}{r+t+i}\right) = \frac{\Gamma(t-s)\Gamma(r+t)}{\Gamma(t)\Gamma(r-s+t)}. \tag{3.28}$$

Demostración. A partir del Lema 19 es claro que

$$\zeta(s,1+x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^n \zeta(s+n)}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(s+i).$$

Este desarrollo y el dado en el Lema 19 implican

$$\begin{aligned}&\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\zeta(s,1-x)\,dx - \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{r-1}\zeta(s,1+x)\,dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{\zeta(s+n)}{n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(s+i)\right) \\ &\qquad\times\left(x^{r+n-1}(1-x)^{t-1} - (-1)^n x^{t+n-1}(1-x)^{r-1}\right)\,dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\zeta(s+n)}{n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(s+i)\right)\left(\beta(r+n,t) - (-1)^n\beta(t+n,r)\right) \\ &= \beta(r,t)\sum_{n=1}^\infty \frac{\zeta(s+n)}{n!}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(s+i)\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{r+i}{r+t+i} - (-1)^n\prod_{i=0}^{n-1}\frac{t+i}{r+t+i}\right),\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado la identidad (3.15). De este modo el resultado se sigue inmediatemente suando el Lema 17. □

Ahora ya nos encontramos en disposición de realizar la demostración del Teorema 16.

Demostración del Teorema 16. Para esta demostración basta tomar la ecuación (3.28) del Teorema 20 e intercambiar t y r y sumar expresiones. De este modo queda demostrado (3.24). Para la demostración de (3.25) tomamos diferencias y queda demostrado el teorema. □

3.4.1. Otras series numéricas usando la función zeta de Hurwitz

En la tercera sección de este capítulo hemos visto como Ramanujan utiliza las funciones $\log\Gamma(x+1/2)$ y $\log\Gamma(x-1/2)$ para obtener series numéricas involiucrando los valores S'_k y cuya suma incorpora el factor $\log(\pi/2)$. Para concluir el artículo, Ramanujan hace uso de las funciones $\zeta(s,x+1/2)$ y $\zeta(s,x-1/2)$ para obtener series numéricas en las que aparecen los valores

$$\zeta_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s}.$$

Las técnicas que utiliza son similares a las que hemos expuesto anteriormente y no entraremos en detalles. Las identidades

$$\begin{aligned}2\zeta_1(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_1(s+2k)}{2k!} \left(\prod_{i=0}^{2k-1} (s+i) \right) \left(\prod_{i=0}^{2k-1} \frac{r+i}{r+t+i} + \prod_{i=0}^{2k-1} \frac{t+i}{r+t+i} \right) \\ = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(r+t)}{\Gamma(r-s+t)} \left(\frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t)} + \frac{\Gamma(r-s)}{\Gamma(r)} \right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}2\zeta_1(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta_1(s+2k+1)}{2k!} \left(\prod_{i=0}^{2k} (s+i) \right) \left(\prod_{i=0}^{2k} \frac{r+i}{r+t+i} + \prod_{i=0}^{2k} \frac{t+i}{r+t+i} \right) \\ = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(r+t)}{\Gamma(r-s+t)} \left(\frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t)} - \frac{\Gamma(r-s)}{\Gamma(r)} \right),\end{aligned}$$

donde r, $t > 0$ y r, $t > s$, son representativas del tipo de resultado de esta parte final del artículo. Puesto que la demostración sigue el patrón de la dada para el Teorema 16 omitimos los detalles.

3.5. Demostración de algunas identidades

3.5.1. El producto de Weiestrass para la función gamma

Vamos a dar una pueba del producto de Weierstrass para la función Gamma.

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k}, \quad z > 0.$$

Usando la identidad

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

tenemos

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Realizando el cambio de variable $t = sn$, deducimos que

$$\begin{aligned}\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n^z \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1}\, ds &= \lim_{n\to\infty} n^z \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(n+z+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\end{aligned}$$

Ahora se tienen las identidades

$$\begin{aligned}\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n^z \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} &= \frac{1}{z} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{z+k}\right) \left(\frac{k+1}{k}\right)^z \\ &= \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z\right).\end{aligned}$$

Luego, para concluir la demostración del producto de Weiestrass, basta probar que

$$e^{\gamma z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z e^{-z/k},$$

pero este producto es equivalente a

$$-\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right)$$

y esta identidad es cierta por la definición de la constante de Euler-Mascheroni γ dada en (3.2).

3.5.2. Expresión integral para la derivada de la función $\log\Gamma(z)$

Veamos, para concluir esta memoria, una demostración de la identidad

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right) dz \tag{3.29}$$

que usamos en el Lema 8.

La pieza fundamental para probar (3.29) es la identidad[1]

$$\gamma = \int_0^\infty e^{-z}\left(\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right). \tag{3.30}$$

Efectivamente, tomando logaritmos en el producto de Weiestrass para la función gamma

$$\log\Gamma(x) = -\gamma x - \log x - \sum_{n=1}^\infty \left(\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right),$$

derivando esta identidad

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

y usando la identidad

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt, \quad \lambda > 0,$$

deducimos que

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= -\gamma - \int_0^\infty e^{-xz}\, dz + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left(e^{-nz} - e^{-(n+x)z}\right) dz \\
&= -\gamma - \int_0^\infty e^{-xz}\, dz + \int_0^\infty \frac{(1-e^{-xz})\, e^{-z}}{1-e^{-z}}\, dz \\
&= -\gamma + \int_0^\infty \frac{1-e^{-xz}}{1-e^{-z}}\, dz \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right) dz,
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado (3.30) para la constante γ.

Para finalizar, probaremos (3.30). En primer lugar es claro que

$$\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\, dt = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{1-(1-t)}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k\, dt = H_n,$$

[1]Notar que la expresión integral para γ es convergente ya que el integrando se comporta como e^{-z} si $z \to \infty$ y como constante si $z \to 0$

donde, recordemos que H_n denota los números armónicos. Por tanto,

$$\begin{aligned} H_n &= \int_0^n \frac{1-(1-t/n)^n}{t}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-(1-t/n)^n}{t}\,dt + \int_1^n \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{(1-t/n)^n}{t}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-(1-t/n)^n}{t} dt + \log n - \int_1^n \frac{(1-t/n)^n}{t}\,dt \end{aligned}$$

y

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \log n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1-(1-t/n)^n}{t}\,dt - \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{(1-t/n)^n}{t}\,dt$$

Ahora, por la desigualdad de Bernoulli, tenemos que $1-(1-t/n)^n \leq t$ y podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para obtener que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1-(1-t/n)^n}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt.$$

Como la sucesión de funciones $(1-t/n)^n \chi_{(0,n)}(t)$ es monótona creciente, por el teorema de la convergencia monótona se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{(1-t/n)^n}{t}\,dt = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Así, tenemos las identidades

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \\ &= \lim_{\delta\to 0} \left(\int_\delta^1 \frac{dt}{t} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \right) \\ &= \lim_{\delta} \left(\int_{1-e^{-\delta}}^1 \frac{dt}{t} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \right), \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado que

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{1-e^{-\delta}} \frac{dt}{t} = \lim_{\delta\to 0} \log\left(\frac{1-e^{-\delta}}{\delta}\right) = 0.$$

De este hecho modo, haciendo el cambio de variable $t = 1-e^{-z}$ en la primera integral se tiene que

$$\gamma = \lim_{\delta\to 0} \left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-z}}{1-e^{-z}}\,dz - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dz \right)$$

y (3.30) se sigue inmediatamente.

Conclusiones

A lo largo de este Trabajo de Fin de Grado se ha realizado una investigación de la vida y obra del matemático indio Srinivasa Ramanujan. En concreto hemos dado una breve biografía personal y científica y hemos analizado en detalle dos de sus trabajos.

La manera habitual en que se presentan las matemáticas a los que estudiamos este grado suele seguir una pauta muy estructurada. En primer lugar, se da una pequeña motivación para introducir un tema, luego se dan las definiciones correspondientes y, finalmente, se demuestran los teoremas, usando ciertos lemas y proposiciones previos. Esta estructura, sin embargo, no aparece en los trabajos de Ramanujan. Sus artículos son difíciles de leer para un estudiante, ya que en muchas ocasiones los resultados no se presentan en forma de teoremas, se dan simplemente como una cierta identidad con un breve comentario y, por supuesto, sin detalles de la demostración. Dar esos detalles ha sido, precisamente, el aspecto más duro de este trabajo. Pero el esfuerzo realizado para obtener esos detalles me ha permitido percatarme de que el trabajo de matemático no es tan simple como en ocasiones pensamos los estudiantes. Me he dado cuenta que es necesario hacer una labor de búsqueda bibliográfica importante y trabajar cada paso de una demostración para poder captar la esencia y dificultad de un resultado. Sin embargo, he aprendido que ahí reside, en parte, la belleza de este oficio.

Espero que hayáis disfrutado de esta memoria, en la que hemos presentado una ínfima parte de las matemáticas de Ramanujan, tanto como yo lo he hecho trabajando en ella.

Bibliografía

[1] B. C. Berndt *Ramanujan's Notebooks. Part I*, Springer-Verlag, Nueva York, 1985.

[2] A. J. Durán, *El ojo de Shiva, el sueño de Mahoma, Simbad... y los números*, Imago Mundi, Ediciones Destino, 2012.

[3] J. W. L. Glaisher, Relations connecting quanties of the form $1+2^{-n}+3^{-n}+4^{-n}+\dots$, *Messenger of Math.*, **44** (1915), 1–10.

[4] G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyan y B. M. Wilson (editores), *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge University Press, Londres, 1927.

[5] G. H. Hardy, The Indian Mathematican Ramanujan, *Amer. Math. Monthly* **44** (1937), 137–155.

[6] G. H. Hardy, *Ramanujan twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge University Press, Londres, 1940.

[7] S. Ramanujan, A series for Euler's constant γ, *Messenger of Math.*, **46** (1917), 73–81.

[8] E. T. Whittakker y G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4^a edición, Cambridge University Press, Londres, 1927.